第10講　集合・場合の数(1)

【基礎確認事項】

[1]　集合と包含関係

□数学において，範囲が明確に決まるものの集まりを**集合**といい，集合を構成する1つ1つのものを，その集合の**要素**という.

□a が集合 A の要素であることを，a は集合 A に**属する**といい，$\boldsymbol{a \in A}$ と表す.
a が集合 A の要素でないことを，$\boldsymbol{a \notin A}$ と表す.

例　偶数全体の集合を A と表すと，$2 \in A$，$3 \notin A$ である.

□集合を表すには，次の(i)，(ii)の方法がある.

(i)　すべての要素を書き並べる　**例**　$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

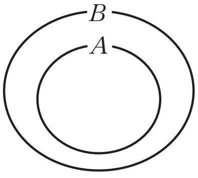
(ii)　要素の満たすべき条件を書く　**例**　$A=\{x|x$ は8の正の約数$\}$

□集合 A の要素が有限個のとき，その個数を $\boldsymbol{n(A)}$ で表す.

例　$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ のとき，$n(A)=4$ である.

□要素が1つもない集合を**空集合**といい，ϕ で表す.

□集合 A，B について，A の要素がすべて B に属するとき，A は B の**部分集合**といい，$\boldsymbol{A \subset B}$ と表す.



$A \subset B$

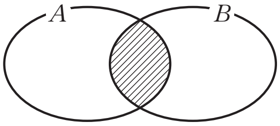
□$A \subset B$ かつ $A \supset B$ のとき，A と B は**等しい**といい，$\boldsymbol{A=B}$ と表す.

□空集合はすべての集合の部分集合である.

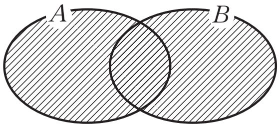
※この本では $A \subset B$ に $A=B$ の場合も含むこととする.

□A と B の両方に属する要素全体の集合を A と B の**共通部分**といい，$\boldsymbol{A \cap B}$ で表す.

□A と B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の**和集合**といい，$\boldsymbol{A \cup B}$ で表す.



$A \cap B$

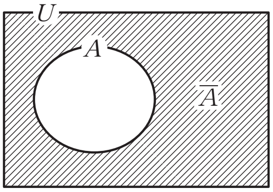


$A \cup B$

例　$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$，$B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，$C=\{2\}$ のとき
$A \cap B=\{-1,\ 0,\ 1\}$，$A \cup B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，$A \cap C=\phi$

□1つの集合 U について，U の要素や U の部分集合だけを考えるとき，U を**全体集合**という.

□全体集合 U の部分集合 A に対し，A に属さない U の要素全体の集合を A の**補集合**といい，$\overline{A}$ と表す．その定義から
$A \cap \overline{A}=\phi$，$A \cup \overline{A}=U$，$\overline{(\overline{A})}=A$ などがわかる.



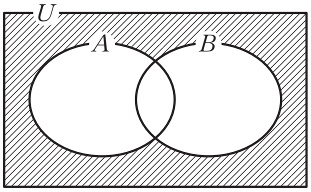
□次の法則が成り立つ.

ド・モルガンの法則

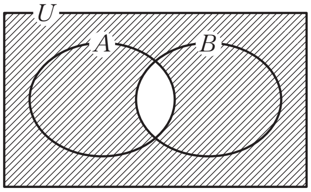
(i)　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(ii)　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(i)



(ii)



□集合の包含関係を図で表したものを**ベン図**という. ベン図は, 複数の集合の包含関係を扱う際にその関係を視覚化でき便利である.

□要素の個数について, 主に次のことが成り立つ. ベン図で考えてみよ.

(i)　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$　　(**個数定理**)

　特に　$A \cap B = \emptyset$ のとき, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(ii)　$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$　　　(iii)　$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B)$

⇒　C&U ①

[2]　和の法則

□ある2つのことがら (事象) A と B があって, これらが同時に起こりえない (A と B は排反である) とする. このとき, A の起こり方が a 通り, B の起こり方が b 通りあるとすれば, A または B が起こる場合の数は　$\boldsymbol{a+b}$　通りである. これを**和の法則**という. 3つ以上の排反な事象についても同じことがいえる.

□これと先の個数定理により, 以下の通りとなる.

$A \cap B = \emptyset$ のとき　$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$A \cap B \neq \emptyset$ のとき　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

つまり, ある事象が起こる場合の数を考える上で, それを排反な事象に分けて考えることが有効な手段の1つである.

例　2個のさいころを同時に投げるとき, 目の和が4の倍数になる場合の数を求める.「目の和が4の倍数」になるのは, 2個のさいころについて

①目の和が4　　②目の和が8　　③目の和が12

の場合があり, ①, ②, ③が同時に起こることはない (排反).

2個のさいころをA, Bとし, 目の出方を (Aの目, Bの目) と表すとすると

①となるのは (1, 3), (2, 2), (3, 1) の3通り

②となるのは (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) の5通り

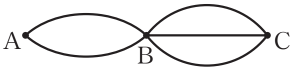
③となるのは (6, 6) の1通り

よって, 和の法則により　求める場合の数は　3+5+1=9 (通り)

［３］ 積の法則

□ある２つのことがら（事象）A と B があって，A の起こり方が a 通りあり，そのどの場合に対しても B の起こり方が b 通りあるとすれば，A と B が同時に起こる場合や A と B が引き続いて起こる場合の数は　$\boldsymbol{a \times b}$　通りである．これを**積の法則**という．３つ以上の排反な事象についても同じことがいえる．

例　A から B に行く道が m 通り，B から C に行く道が n 通りあるとすると，A から B の行き方 m 通りのそれぞれについて，B から C の行き方 n 通りが存在する．よって積の法則によりその場合の数は　$m \times n$　通りである．



$m=2$, $n=3$のとき
$2 \times 3=6$(通り)

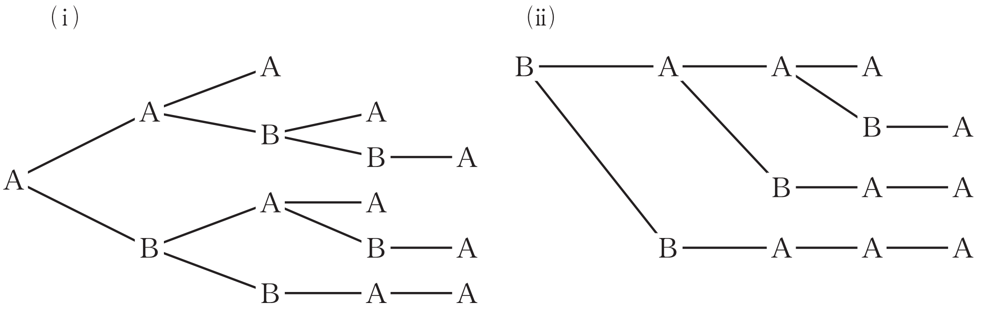
⇒　C&U ２

［４］ 樹形図

□すべての場合をもれなく，重複なく数え上げるためには，その表記の方法を工夫することが必要である．有効な表記の方法として**樹形図**が挙げられる．

例　A と B が対戦し，先に３勝した方を優勝とする．引き分けはないものとして，A が優勝する場合は何通りあるか．

対戦で勝った方を枝分かれの図で表す．



(ⅰ)は１試合目で A が勝った場合，(ⅱ)は１試合目で B が勝った場合で，(ⅰ)と(ⅱ)は排反である．よって求める場合の数は　$6+4=10$（通り）

□排反になる事象の分け方は決して１つではない．その分け方によっては，後述の「順列」，「組合せ」などを活用して数え上げることも可能である．その一方で，さまざまな制約によりそれが使えないこともある．また，分け方によって「規則性」を利用できる場合もある．樹形図を含め，数え上げるための表記の方法を状況に応じて活用していこう．

⇒　C&U ３

【CHECK & UP】

1　集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 A，B について

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 9\},\ A\cap B=\{2\},\ \overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$$

であるとき，次の集合の要素の個数を求めよ．

(1)　$A\cup B$　　(2)　B　　(3)　A

2　さいころを 2 回投げるとき，次の場合の数を求めよ．

(1)　2 回の目の和が 4 または 5 になる目の出方

(2)　2 回の目の積が奇数である目の出方

3　a，b，b，b，c の 5 個の文字から 3 個選んで 1 列に並べる方法は何通りあるか．

< Note >

第10講　集合・場合の数(1)

1　1から100までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ．

(1)　偶数

(2)　3で割り切れない整数

(3)　2でも3でも割り切れる整数

(4)　2と3の少なくとも一方で割り切れる整数

(5)　3で割り切れるが2で割り切れない整数

(6)　2と3の少なくとも一方で割り切れない整数

< Note >

2 ［1］ $x+y \leqq 4$ を満たす正の整数 x，y の組はいくつあるか．

［2］ (1) $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ を展開した式の項は何個あるか．

(2) 360 の正の約数の個数と，その総和を求めよ．

< Note >

3　5冊の異なる本がそれぞれ対応するブックケースに1冊ずつ入っている．それぞれの本をブックケースから取り出したあと，すべて間違ったブックケースに入れる方法は何通りあるか．ただし，ブックケースはすべて異なるとする．

＜ Note ＞

第10講　集合・場合の数(1)

144の正の約数全体の集合をA，216の正の約数全体の集合をBとする．集合$A\cup B$の要素の個数を求めよう．$144=2^{\boxed{ア}}\times 3^{\boxed{イ}}$より$n(A)=\boxed{ウエ}$である．$n(B)$も同様に求められる．また，$A\cap B$，すなわち144と216の正の公約数の集合は，その最大公約数の約数全体の集合である．144と216の最大公約数は$2^{\boxed{オ}}\times 3^{\boxed{カ}}$であることより，$n(A\cap B)$を求めることができる．したがって，個数定理により$n(A\cup B)=\boxed{キク}$である．また，$A$の要素の和は$\boxed{ケコサ}$である．

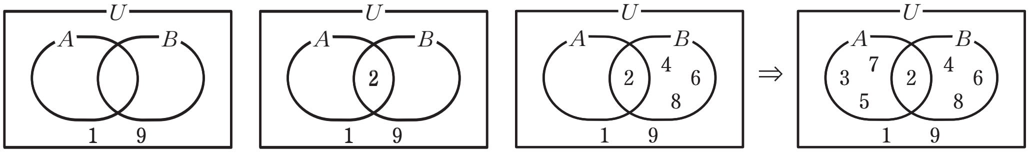
＜ Note ＞

第10講　集合・場合の数(1)

【CHECK & UP】

1 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

$=\{1,\ 9\}$ → $A\cap B=\{2\}$ → $\overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$



(1) $n(A\cup B)=\mathbf{7}$

(2) $n(B)=\mathbf{4}$

(3) $n(A)=\mathbf{4}$

集合が2つ以上絡むとき，その共通部分（∩）や和集合（∪）などに注目しながらその関係をベン図に表すことは，集合のみならず複数の「条件」を扱う際にも有効である．今回は具体的な要素であるが，要素の個数や条件を満たす個数についても同様に扱えるように練習しよう．

2 出目を（1回目の出目，2回目の出目）と表す．

(1) 和が4になるのは (1，3)，(2，2)，(3，1) の3通り

和が5になるのは (1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1) の4通り

よって，3＋4＝**7（通り）**

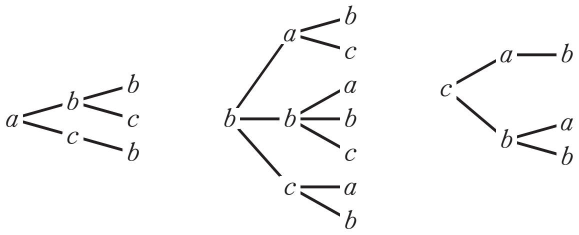
(2) 奇数の目は1，3，5の3通り．よって題意を満たすのは1回目，2回目ともにこの3通りのいずれかが出るとき．1回目の3通りに対し，1回目に関係なく2回目も3通り．

よって　3×3＝**9（通り）**

和が4になることと，和が5になることは決して同時に起こることはない．よってこの2つの事象は排反であり，それぞれを求めてから和の法則で答えを導いた．排反については後の講で詳しく学ぶが，場合の数を扱うときそれを排反に分けて考える場面に今後も数多く出会うであろう．

(1)の「和」は1回目と2回目の目を関連づけるものであった．(2)の「積」が奇数，については1回目，2回目の目がともに「奇数」であるが，1回目と2回目の目は互いに影響を及ぼさない．したがって積の法則で求めた．

3



よって **13通り**．

樹形図の利用である．後の「順列」,「組合せ」を習ったあとは計算で求める方法もあるが，まずは書き上げる方法を身につける．ここで，先頭が a のものと先頭が c のものの場合がいずれも3通りで同じであるが，この理由はわかるだろうか．それは問題の文字の個数が a と c で同じであり，他に a と c に差をつけるような条件がないためである．同様，先頭が b のときの2番目は a と c の場合がともに2通りであることに注目しよう．

第 10 講　集合・場合の数(1)

1　1 から 100 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ．

(1)　偶数

(2)　3 で割り切れない整数

(3)　2 でも 3 でも割り切れる整数

(4)　2 と 3 の少なくとも一方で割り切れる整数

(5)　3 で割り切れるが 2 で割り切れない整数

(6)　2 と 3 の少なくとも一方で割り切れない整数

1 から 100 までの整数全体の集合を U，そのうち 2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B とする．

$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$，$B=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$

(1)　$n(A)=\mathbf{50}$ **(個)**

(2)　$n(U)=100$，$n(B)=33$ より，$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=100-33=\mathbf{67}$ **(個)**

(3)　2 でも 3 でも割り切れる，すなわち 6 の倍数全体の集合は

$A\cap B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$　より　$n(A\cap B)=\mathbf{16}$ **(個)**

(4)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+33-16=\mathbf{67}$ **(個)**

(5)　$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=33-16=\mathbf{17}$ **(個)**

(6)　$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)=100-16=\mathbf{84}$ **(個)**

2　[1]　$x+y\leqq4$ を満たす正の整数 x，y の組はいくつあるか．

$x+y\leqq4$ となるのは

$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$　の **6 組**

【別解】　$x+y\leqq4$ となるのは次の通り

(i)　$x+y=2$　　(ii)　$x+y=3$　　(iii)　$x+y=4$

(i)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 1)$　の 1 通り

(ii)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$　の 2 通り

(iii)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ の　3 通り

(i)，(ii)，(iii)は排反より，求める場合の数は　$1+2+3=\mathbf{6}$ **(組)**

2　[2]　(1)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ を展開した式の項は何個あるか．

(2)　360 の正の約数の個数と，その総和を求めよ．

(1)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ を展開した式の項は

(a，b のいずれか 1 つ)×(c，d，e のいずれか 1 つ)×(f，g，h，i のいずれか 1 つ)

の形である．よってその項の個数は　$2\times3\times4=\mathbf{24}$ **(個)**

(2)　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$ より，360 の正の約数は

　　$(2^3$ の正の約数の1つ$)\times(3^2$ の正の約数の1つ$)\times(5$ の正の約数の1つ$)$

の形で表される．

　2^3 の正の約数は　1，2，2^2，2^3 の4個

　3^2 の正の約数は　1，3，3^2 の3個

　5の正の約数は　1，5の2個

よって約数の個数は　$4\times3\times2=$**24（個）**

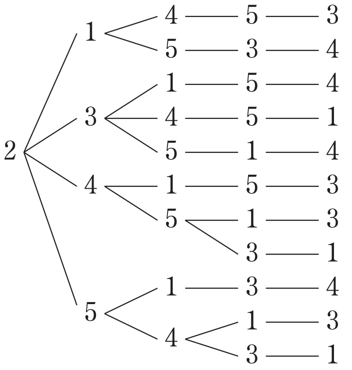
また，約数の総和は　$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\cdot13\cdot6=$**1170**

---

[3]　5冊の異なる本がそれぞれ対応するブックケースに1冊ずつ入っている．それぞれの本をブックケースから取り出したあと，すべて間違ったブックケースに入れる方法は何通りあるか．ただし，ブックケースはすべて異なるとする．

5冊の異なる本を1，2，3，4，5とする．求める場合の数は，1から5の数字を順番に並べたとき，k 番目に k の数字がこない $(k=1, 2, 3, 4, 5)$ ときの並べ方の総数である．

1番目が2のとき，そのような並べ方は以下．



よって11通り．

1番目が3，4，5のときも同様に11通りある．

したがって，求める場合の数は　$11\times4=$**44（通り）**

第10講　集合・場合の数(1)

144の正の約数全体の集合をA，216の正の約数全体の集合をBとする．集合$A\cup B$の要素の個数を求めよう．$144=2^{\boxed{ア}}\times 3^{\boxed{イ}}$より$n(A)=\boxed{ウエ}$である．$n(B)$も同様に求められる．また，$A\cap B$，すなわち144と216の正の公約数の集合は，その最大公約数の約数全体の集合である．144と216の最大公約数は$2^{\boxed{オ}}\times 3^{\boxed{カ}}$であることより，$n(A\cap B)$を求めることができる．したがって，個数定理により$n(A\cup B)=\boxed{キク}$である．また，$A$の要素の和は$\boxed{ケコサ}$である．

$144=2^4\times 3^2$ より　$n(A)=5\times 3=\mathbf{15}$

$216=2^3\times 3^3$ より　$n(B)=4\times 4=16$

また，144と216の最大公約数は　$2^3\times 3^2$ であることより

$$n(A\cap B)=4\times 3=12$$

よって個数定理　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$　より

$$n(A\cup B)=15+16-12=\mathbf{19}$$　である．

また，Aの要素の和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)=31\times 13=\mathbf{403}$$